Wahrscheinlichkeitstheorie

Blatt 10

Aufgabe 1 *(4 Punkte)*
Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von unabhängigen $\mathcal{N}(0,1)$ verteilten Zufallsvariablen. Definiere $S_n := \sum_{k=1}^{n}$ und

$$M_n := e^{S_n - \frac{n}{2}}, \quad n \geq 1, \quad M_0 := 0$$

sowie $\mathcal{F}_n := \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ und $\mathcal{F}_0 := \{\emptyset, \Omega\}$. Zeigen Sie, dass $(M_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist.

Aufgabe 2 *(4 Punkte)*
Sei $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal bezüglich der Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. X_t habe Werte in $\mathbb{R}$ und stetige Pfade.

(a) Bestimmen Sie für $0 \leq s \leq t$

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t X_u du \middle| \mathcal{F}_s \right)$$

(b) Zeigen Sie, dass

$$M_t := \int_0^t X_u du - tX_t$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ ist.

Aufgabe 3 *(4 Punkte)*
Es sei $(B_t)_{t\geq 0}$ die Brownsche Bewegung mit $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s \mid s \leq t)$. Zeigen Sie, dass für jedes $\xi \in \mathbb{R}$

$$M_t := e^{\xi B_t - \frac{1}{2}\xi^2 t}, \quad t \geq 0$$

ein Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ definiert.

Aufgabe 4 *(4 Punkte)*
Es sei $M_t \in \mathcal{L}^1$ adaptiert an die Filtration $\mathcal{F}_t$. Zeigen Sie:
$(M_t)_{t\geq 0}$ ist genau dann ein Martingal, wenn $(M_t)_{t\geq 0}$ ein Submartingal ist und $\mathbb{E}(M_t) = \mathbb{E}(M_0)$ für alle $t \geq 0$ gilt.